Научная статья
УДК 517.5
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-163-183

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ СОВМЕСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ “УГЛАМИ”

Мирганд Шабозович Шабозов[1]
Фавзия Мадимаровна Мадимарова[2]

[1]Таджикский национальный университет,
[2]Университет центральной Азии,
Душанбе, Таджикистан

[1]shabozov@mail.ru
[2]favzimadimarova@gmail.com

Аннотация

В работе найдены некоторые точные неравенства между наилучшими совместными приближениями функций двух переменных и их промежуточных производных алгебраическими “углами” и усреднёнными значениями обобщённого модуля непрерывности r-ых производных $\mathcal{D}^r f$ $(r \in \mathbb{N})$, где $\mathcal{D}$ — дифференциальный оператор второго порядка Чебышева в метрике пространства $L_{2,\mu}(Q)$, $Q := \{(x,y) : -1 \le x, y \le 1\}$ с весом Чебышева $\mu := \mu(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$. Указанный обобщенный модуль непрерывности порождён специальным оператором обобщённого сдвига для разложения произвольной функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ в двойной ряд Фурье–Чебышева. Полученные результаты в виде неравенств, связывающих величины наилучшего приближения функций алгебраическими “углами” с двойными интегралами, содержащих модуль непрерывности $\Omega_k(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu}$ на классе $L_{2,\mu}^{(r)} := \{f \in L_{2,\mu} : \|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} < \infty\}$, являются точными в том смысле, что существует экстремальная функция $f_0 \in L_{2,\mu}^{(r)}$, для которой они обращаются в равенства.

Ключевые слова и фразы

приближение “углом”, чебышевский вес, дифференциальный оператор, гильбертово пространство, оператор обобщённого сдвига, модуль непрерывности .

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 163-183
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 163-183

Для цитирования

Шабозов М.Ш., Мадимарова Ф.М. Среднеквадратическое совместное приближение некоторых классов функций двух переменных алгебраическими "углами" // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 1, С. 163-183. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-163-183

Mean square simultaneous approximation of certain classes of functions of two variables by algebraic "angles"

Mirgand Sh. Shabozov[1], **Favziya M. Madimarova**[2],

[1]Tajik National University,
[2]University of Central Asia,
Dushanbe, Tajikistan

[1]shabozov@mail.ru
[2]favzimadimarova@gmail.com

Abstract

The paper establishes certain exact inequalities between the best simultaneous approximations of functions of two variables and their intermediate derivatives by algebraic "angles" and the averaged values of the generalized modulus of continuity of the r-th derivatives $\mathcal{D}^r f$ $(r \in \mathbb{N})$, where $\mathcal{D}$ is the second-order Chebyshev differential operator in the metric of the space $L_{2,\mu}(Q)$, $Q := \{(x,y) : -1 \le x, y \le 1\}$ with the Chebyshev weight $\mu := \mu(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$. The aforementioned generalized modulus of continuity is generated by a special generalized shift operator used for the expansion of an arbitrary function $f \in L_{2,\mu}(Q)$ into a double Fourier–Chebyshev series. The obtained results are presented in the form of inequalities that relate the quantities of the best approximation of functions by algebraic "angles" to double integrals involving the modulus of continuity $\Omega_k(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu}$ on the class $L^{(r)}_{2,\mu} := \left\{f \in L_{2,\mu} : \left\|\mathcal{D}^r f\right\|_{2,\mu} < \infty\right\}$. These inequalities are exact in the sense that there exists an extremal function $f_0 \in L^{(r)}_{2,\mu}$, for which the inequalities become equalities.

Keywords

approximation by "angle", Chebyshev weight, differential operator, Hilbert space, generalized shift operator, modulus of continuity.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 163-183
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 163-183

For citation

Shabozov M. Sh., Madimarova F. M., Mean square simultaneous approximation of certain classes of functions of two variables by algebraic "angles" // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 1, P. 163-183. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-163-183

§1. Введение

В работе изучаются экстремальные задачи, связанные с наилучшими совместными приближениями функций двух переменных и их промежуточных производных алгебраическими "углами" с усреднёнными значениями обобщённого модуля непрерывности r-ых производных $\mathcal{D}^r f$ $(r \in \mathbb{N})$, (где $\mathcal{D}$ — дифференциальный оператор второго порядка Чебышева) в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}(Q)$, $Q := \{(x, y) : -1 \leq x, y \leq 1\}$ с весом Чебышева $\mu(x, y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$. Полученные здесь результаты являются обобщением результатов работы [1] доказанных для полиномиальной приближении функций $f \in L_{2,\mu}[-1, 1]$, $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ на случай приближении алгебраическими "углами" функций двух переменных $f \in L_{2,\mu}(Q)$.

Отметим, что впервые задача совместного приближения периодических функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами и их соответствующими производными в равномерной метрике исследована А. Л. Гаркави [2], а в случае приближения функций и их производных на всей оси целыми функциями изучена А. Ф. Тиманом [3]. В более общей ситуации задача совместного приближения функций рассматривается в монографии В. Н. Малоземов [4], где приводится обобщение некоторых классических теорем на случай совместного приближения функций. Отметим, что для некоторых классов периодических функций, у которых усреднённый с весом обобщённый модуль непрерывности высшего порядка в $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ ограничен сверху заданной мажорантой, точное решение сформулированной задачи найдено в [5]. Аналогичная задача для некоторых классов аналитических в круге функций из пространств Харди и Бергмана рассмотрена в работах [6, 7].

Отметим, что по сравнению с одномерным случаем, исследование вопросов приближения функций двух и более переменных значительно усложняется ввиду появление новых обстоятельств, связанных с многомерностью. Во — первых, область на которой осуществляется приближение, может иметь весьма сложную структуру. Трудности возникает при описании дифференциально - разностных свойств функций многих переменных, поскольку эти свойства могут быть различными по разным направлениям. При этом усложняется и приближающий аппарат. Всё это вместе приводят к тому, что методы исследования экстремальных задач, существенно использующие специфику одномерного случая, не всегда удаётся перенести на функции двух переменных. В связи с этим точных результатов в задачах отыскании верхней грани погрешности приближения на классах функций многих переменных, совсем мало.

Пусть $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(Q)$ — пространство суммируемых с квадратом функций двух переменных $f(x,y)$ в области $Q := [-1,1]\times[-1,1]$ с весом $\mu(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ и конечной нормой [1]

$$\|f\|_{2,\mu} := \|f\|_{L_{2,\mu}(Q)} = \left(\iint\limits_{(Q)} \mu(x,y) f^2(x,y)dxdy\right)^{1/2}.$$

В пространстве $L_{2,\mu}$ задачи приближения функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье изучены в [8], где получены некоторые асимптотически точные оценки и приведены их приложения в теории кубатурных формул чебышевского типа.

Известно, что в вопросах сходимости тригонометрических рядов Фурье периодических функций важную роль играет оператор сдвига $T_h f(x) := f(x+h)$ и определяемые с его помощью модули непрерывности различных порядков. В аналогичных вопросах, связанных со сходимостью рядов Фурье по классическим ортогональным полиномам аналогичную роль играют операторы обобщённого сдвига и порождённые ими обобщённые модули непрерывности.

В данной статье оператор обобщённого сдвига позволил получить ряд точных результатов при решении экстремальных задач приближения функций двух переменных алгебраическими "углами" [9].

В пространстве $L_{2,\mu}$ рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} F_h(f) := F_h f(x,y) = \frac{1}{4}\Big[f\left(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h + \sqrt{1-y^2}\sin h\right) \\ + f\left(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h - \sqrt{1-y^2}\sin h\right) \\ + f\left(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h + \sqrt{1-y^2}\sin h\right) \\ + f\left(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h - \sqrt{1-y^2}\sin h\right)\Big], \end{aligned} \tag{1}$$

который будем называть оператором обобщёного сдвига.

Символом $F_t^x(f)$ (соответственно $F_\tau^y(f)$) обозначим действие оператора обобщённого сдвига (1) на функцию $f \in L_{2,\mu}$ как на функцию от переменной x (соответственно y) при фиксированном значении переменной y (соответственно x). При этом полагаем

$F_t^{\nu,x}(f) := F_t^1(F_t^{\nu-1,x}(f))$, где $\nu \in \mathbb{N}$, $F_t^{0,x}(f) = f$, $F_t^{1,x}(f) = F_t^x(f)$.

Аналогичным образом полагаем

$F_{\tau}^{\mu,y}(f) := F_{\tau}^{1,y}(F_{\tau}^{\mu-1,y}(f))$, где $\mu \in \mathbb{N}$, $F_{\tau}^{0,y}(f) := f$, $F_{\tau}^{1,y}(f) := F_{\tau}^{y}(f)$.

Определим обобщённые конечные разности первого и высших порядков по переменной x, используя оператор (1). Полагаем

$$\Delta_t^x(f) := F_t^x(f) - (f) = \big(F_t^x - \mathbb{I}\big)f,$$

где $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $L_{2,\mu}(Q)$ и для $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ по индукции запишем общую формулу

$$\Delta_t^{k,x}(f) := \Delta_t^{1,x}\big(\Delta_t^{k-1,x}(f)\big) = \big(F_t^x - \mathbb{I}\big)^k f = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-1}\binom{k}{i}F_t^{i,x}(f). \qquad (2)$$

Аналогично для $l \geq 2$, $l \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\Delta_\tau^{l,y}(f) := \Delta_\tau^{1,y}\big(\Delta_\tau^{l-1,y}(f)\big) = \big(F_\tau^y - \mathbb{I}\big)^l f = \sum_{j=0}^{l}(-1)^{l-j}\binom{l}{j}F_\tau^{j,x}(f) \qquad (3)$$

Из соотношений (2) и (3), следуя вышеприведенной схеме, получаем

$$\begin{aligned}\Delta_t^x\big(\Delta_\tau^y(f)\big) &= \Delta_t^x\big(F_\tau^y(f) - f\big) = \Delta_t^x\big(F_\tau^y - (f)\big) - \Delta_t^x(f)\\ &= F_t^x\big(F_\tau^y\big) - F_\tau^y(f) - F_t^x(f) + f = \big(F_t^x - \mathbb{I}\big)\big(F_\tau^y - \mathbb{I}\big)f,\end{aligned}$$

и для введённых смешанных конечных разностей по x и по y высших порядков имеем

$$\begin{aligned}\Delta_t^{k,x}\big(\Delta_\tau^{l,y}(f)\big) &= \Delta_t^{1,x}\big(\Delta_t^{k-1,x}(\Delta_\tau^{l,y}(f))\big)\\ &= \Delta_\tau^{k,x}\big(\Delta_\tau^{1,y}(\Delta_\tau^{l-1,y}(f))\big) = \big(F_t^x - \mathbb{I}\big)^k\big(F_\tau^y - \mathbb{I}\big)^l f\\ &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}(-1)^{k+l-(i+j)}\binom{k}{i}\binom{l}{j}F_t^{i,x}\big(F_\tau^{j,y}(f)\big).\end{aligned}$$

Из этого равенства сразу следует, что

$$\Delta_t^{k,x}\big(\Delta_\tau^{l,y}\big)(f) = \Delta_\tau^{l,y}\big(\Delta_t^{k,x}(f)\big).$$

Величину

$$\Omega_{k,l}(f;\delta,\eta)_{2,\mu} = \sup\big\{\big\|\Delta_t^{k,x}(\Delta_\tau^{l,y}(f))\big\|_{2,\mu} : |t| \leq \delta, |\tau| \leq \eta\big\}, \qquad (4)$$

где $0 \leq \delta, \eta \leq 1$, будем называть *обобщённым смешанным модулем непрерывности* порядка k по x и порядка l по y функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$.

Пусть далее $T_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, $T_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x)$, $n = 1, 2, \ldots$ — ортонормированная система многочленов Чебышева (см., [10, с.76]) в пространстве $L_{2,\mu} := L_2((-1,1), (\sqrt{1-x^2})^{-1})$ и

$$f(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f)T_p(x)T_q(y),$$

— двойной ряд Фурье–Чебышева, где

$$c_{pq}(f) = \iint_{(Q)} \mu(x,y)f(x,y)T_p(x)T_q(y)dxdy.$$

Следуя схеме рассуждений, привёденной в [8, 11], легко доказать, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ в смысле сходимости в метрике $L_{2,\mu}(Q)$ имеет место равенство

$$\Delta_t^{k,x}(\Delta_\tau^{l,y}(f); x, y) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} c_{pq}(f)(\cos pt - 1)^k(\cos q\tau - 1)^l T_p(x)T_q(y). \quad (5)$$

Из (4), учитывая соотношение (5), после несложных вычислений получаем

$$\Omega_{k,l}(f;\delta,\eta)_{2,\mu} := \sup_{\substack{|t|\le\delta\\|\tau|\le\eta}}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}(1-\cos pt)^{2k}(1-\cos q\tau)^{2l}c_{pq}^2(f)\right\}^{1/2}. \quad (6)$$

Всюду далее

$$\mathcal{D} := (1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

— дифференциальный оператор второго порядка Чебышева.

Через $L_{2,\mu}^{(r)} = L_{2,\mu}^{(r)}(Q,\mathcal{D})$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}$, у которых частные производные

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^l},\ k + l = m,\ m = 1, 2, \ldots, 2r$$

принадлежат также $L_{2,\mu}$. При этом, как обычно, полагаем

$$\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f) \in L_{2,\mu},\ \mathcal{D}^1 := \mathcal{D};\ \mathcal{D}^0 f = f,\ L_{2,\mu}^{(0)} = L_{2,\mu}.$$

В [8] доказано, что для коэффициентов Фурье–Чебышева произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ имеет место равенство

$$c_{pq}(f) = (-1)^r (p^2+q^2)^{-r} c_{pq}(\mathcal{D}^r f), \quad p,q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, \tag{7}$$

где $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup 0$.

Учитывая формулу (7), из равенства (5) получаем

$$\begin{aligned}
&\Delta_t^{k,x}(\mathcal{D}_\tau^{l,y}(\mathcal{D}^r f); x, y) \\
&\quad = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} c_{pq}(\mathcal{D}^r f)(\cos pt - 1)^k (\cos q\tau - 1)^l T_p(x) T_q(y) \\
&\quad = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^r (p^2+q^2)^r (\cos pt - 1)^k (\cos q\tau - 1)^l c_{pq}(f) T_p(x) T_q(y). \qquad (8)
\end{aligned}$$

Из соотношения (4), в силу формулы (8) и (6), получаем

$$\begin{aligned}
&\Omega_{k,l}(\mathcal{D}^r f; \delta, \eta)_{2,\mu} \\
&\quad := \sup_{\substack{|t|\le\delta \\ |\tau|\le\eta}} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} (p^2+q^2)^{2r} (1-\cos pt)^{2k} (1-\cos q\tau)^{2l} c_{pq}^2(f) \right\}^{1/2}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Всюду далее полагаем $\Omega_{k,k}(\mathcal{D}^r f; \delta, \eta)_{2,\mu} := \Omega_k(\mathcal{D}^r f; \delta, \eta)_{2,\mu}$.

§2. Основные результаты

Пусть $L_{2,\mu(x)}[-1,1]$, где $\mu(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ есть пространство измеримых функций f таких, что $\mu^{1/2} f$ интегрируема с квадратом в пространстве $L_2[-1,1]$. Полагаем, что $U_{m+1} \subset L_{2,\mu(x)}[-1,1]$ и $V_{n+1} \subset L_{2,\mu(y)}[-1,1]$ — конечномерные подпространства с базисами $\{T_i(x)\}_{i=0}^m$ и $\{T_j(y)\}_{j=0}^n$ соответственно, где $m, n \in \mathbb{Z}_+$. В пространстве $L_{2,\mu(x,y)}(Q)$ рассмотрим множество

$$G(U_{m+1}, V_{n+1}) := L_{2,\mu(y)}[-1,1] \otimes U_{m+1} \oplus L_{2,\mu(x)}[-1,1] \otimes V_{n+1}, \tag{10}$$

где символами "$\otimes$" и "$\oplus$" обозначены соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множество (10) представимы в виде

$$g_{m,n}(x,y) := \sum_{i=0}^{m} \varphi_i(y) T_i(x) + \sum_{j=0}^{n} \psi_j(x) T_j(y), \tag{11}$$

где $\{\varphi_i(y)\}_{i=0}^m \subset L_{2,\mu(y)}[-1,1]$, $\{\psi_j(x)\}_{j=0}^n \subset L_{2,\mu(x)}[-1,1]$ — произвольные наборы функций из указанных подпространств. Функции вида (11) называют "углами" из алгебраических полиномов [9]. Напомним, что понятие "угла", как одного из эффективных аппаратов приближения функций многих переменных, было введено М. К. Потаповым [12] и нашло широкое применение в исследовании других математиков (см., например, [13–18]). Далее при изложении основных результатов данной статьи будем следовать схеме рассуждений, приведённой в [16]. Для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}$ равенством

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_{2,\mu} := \inf\{\|f - g_{m,n}\|_{2,\mu} : g_{m,n} \in G(U_{m+1}, V_{n+1})\} \tag{12}$$

определим наилучшее приближение элементами (11) из множества (10) в пространстве $L_{2,\mu}$. В [19] доказано, что среди всех элементов $g_{m-1,n-1}(x,y)$ вида (11), принадлежащих множеству (10), наилучшее приближение функции f доставляет ее обобщённый полином Фурье–Чебышева следующего вида

$$\sigma_{m,n}(f;x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)T_i(x)T_j(y) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}(f)T_i(x)T_j(y) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}(f)T_i(x)T_j(y).$$

При этом

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_{2,\mu} = \|f - \sigma_{m,n}(f)\|_{2,\mu} = \left\{\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} c_{ij}^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{13}$$

Поскольку для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, наравне с функциями f и $\mathcal{D}^r f$, последовательные производные $\mathcal{D}^s f$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$ также принадлежат пространству $L_{2,\mu}$, то определённый интерес представляет отыскание точной верхней грани наилучших совместных приближений функций и их производных

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} := \inf\big\{\|\mathcal{D}^s f - \mathcal{D}^s g_{m-1,n-1}\|_{2,\mu} : g_{m-1,n-1} \in G(U_m, V_n)\big\} \tag{14}$$

на некотором подклассе $\mathfrak{M}^r \subset L_{2,\mu}^{(r)}$ или на самом классе $L_{2,\mu}^{(r)}$. Точнее, требуется найти значение величины

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)})_{2,\mu} := \sup\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\}. \tag{15}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *При любых* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} = \frac{1}{(m^2+n^2)^{r-s}}. \tag{16}$$

Доказательство. Заметим, что если в равенстве (13) функцию f заменить на $\mathcal{D}^s f$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$, то получаем равенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}$$
$$:= \|\mathcal{D}^s f - \sigma_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)\|_{2,\mu} = \left\{ \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} c_{pq}^2(\mathcal{D}^s f) \right\}^{1/2}. \tag{17}$$

Пользуясь формулой (7), для величины (17) будем иметь

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} = \left\{ \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} (p^2+q^2)^{2s} c_{pq}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{18}$$

Из (18) при любых $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} &= \left\{ \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} (p^2+q^2)^{-2(r-s)} (p^2+q^2)^{2r} c_{pq}^2(f) \right\}^{1/2} \\ &\leq (m^2+n^2)^{-(r-s)} \left\{ \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} (p^2+q^2)^{2r} c_{pq}^2(f) \right\}^{1/2} \\ &= (m^2+n^2)^{-(r-s)} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}. \end{aligned} \tag{19}$$

Так как неравенство (19) имеет место для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, то из него для величины, расположенной в левой части равенства (16), получаем оценку сверху

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} \leq \frac{1}{(m^2+n^2)^{r-s}}. \tag{20}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу той же величины рассмотрим функцию

$$f_0(x, y) = T_m(x) T_n(y) \in L_{2,\mu}^{(r)}.$$

Из (18) при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ следует, что

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f_0)_{2,\mu} = (m^2+n^2)^s. \tag{21}$$

Учитывая полученное равенство, запишем

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}}\ge\frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f_0)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f_0)_{2,\mu}}$$
$$=\frac{(m^2+n^2)^s}{(m^2+n^2)^r}=\frac{1}{(m^2+n^2)^{r-s}}. \qquad (22)$$

Сопоставляя оценку сверху (20) с оценкой снизу (22), получаем требуемое равенство (16). Теорема 1 доказана.

Через $W^{(r)}L_{2,\mu}$ обозначим класс функций $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$, удовлетворяющих условию $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu}\le 1$. Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *При всех $0\le s\le r$ справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(W^{(r)}L_{2,\mu})_{2,\mu}$$
$$=\sup\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}: f\in W^{(r)}L_{2,\mu}\}$$
$$=(m^2+n^2)^{-(r-s)}. \qquad (23)$$

Доказательство. Так как для любой функции $f\in W^{(r)}L_{2,\mu}$

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}\le\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu}\le 1,$$

то из (18) следует оценка сверху величины расположенной в левой части (23):

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(W^{(r)}L_{2,\mu})_{2,\mu}\le(m^2+n^2)^{-(r-s)}. \qquad (24)$$

Для функции $f_1(x,y)=(m^2+n^2)^{-r}T_m(x)T_n(y)$, очевидно принадлежащей классу $W^{(r)}L_{2,\mu}$ и для которой

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu}=(m^2+n^2)^{-(r-s)}$$

запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(W^{(r)}L_{2,\mu})_{2,\mu}\ge\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu}=(m^2+n^2)^{-(r-s)}. \qquad (25)$$

Равенство (23) получаем из сопоставления неравенств (24) и (25). Следствие 1 доказано.

Теорема 2. *Для любых чисел $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$, удовлетворяющих неравенствам $0<mu\le\pi/2$, $0<nv\le\pi/2$, при любом $k\in\mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{\int_0^u\int_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k}$$
$$=\left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k. \qquad (26)$$

Доказательство. Приведём доказательство (26) сначала при $s = 0$. Докажем, что для любой функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{2,\mu} - \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}(\cos pt + \cos q\tau - \cos pt \cos q\tau)c_{pq}^2(f)$$
$$\leq (m^2+n^2)^{-2r}(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu}. \qquad (27)$$

В самом деле, если полагать в (9) $k = l$, то имеем

$$\Omega_k^2(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu} = \sup_{\substack{|h|\leq t\\ |\eta|\leq\tau}}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}(p^2+q^2)^{2r}(1-\cos ph)^{2k}(1-\cos q\eta)^{2k}c_{pq}^2(f)\right\}.$$

Используя неравенство Гельдера для сумм, с учетом (13), получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{2,\mu} - \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}(\cos pt + \cos q\tau - \cos pt\cdot\cos q\tau)c_{pq}^2(f)$$
$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}(1-\cos pt - \cos q\tau + \cos pt\cos q\tau)c_{pq}^2(f)$$
$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}(1-\cos pt)(1-\cos q\tau)c_{pq}^2(f)$$
$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}(c_{pq}^2(f))^{1-1/(2k)}(c_{pq}^2(f))^{1/(2k)}(1-\cos pt)(1-\cos q\tau)$$
$$\leq \left(\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}c_{pq}^2(f)\right)^{1-1/(2k)} \times$$
$$\times \left(\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}(1-\cos pt)^{2k}(1-\cos q\tau)^{2k}c_{pq}^2(f)\right)^{1/(2k)}$$
$$= (\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\Bigg(\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}(p^2+q^2)^{-2r}(p^2+q^2)^{2r}$$
$$\times (1-\cos pt)^{2k}(1-\cos q\tau)^{2k}c_{pq}^2(f)\Bigg)^{1/(2k)}$$
$$\leq (m^2+n^2)^{-r/k}\,(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\,\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu},$$

откуда и следует неравенство (27). Интегрируя обе части неравенства (27) по прямоугольнику $\{0 \leq t \leq u, 0 \leq \tau \leq v\}$ и поделив полученное соотношение на uv, будем иметь

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}-\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\left(\frac{\sin pu}{pu}+\frac{\sin qv}{qv}-\frac{\sin pu}{pu}\cdot\frac{\sin qv}{qv}\right)c_{pq}^{2}(f)$$
$$\leq(m^2+n^2)^{-r/k}(\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\frac{1}{uv}\int_0^u\int_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^rf;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau. \quad (28)$$

Неравенство (28) запишем в виде

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\leq\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\left(\frac{\sin pu}{pu}+\frac{\sin qv}{qv}-\frac{\sin pu}{pu}\cdot\frac{\sin qv}{qv}\right)c_{pq}^{2}(f)$$
$$\leq(m^2+n^2)^{-r/k}(\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\frac{1}{uv}\int_0^u\int_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^rf;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau. \quad (29)$$

Заметим, что

$$\max\left\{\left|\frac{\sin t}{t}+\frac{\sin\tau}{\tau}-\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin\tau}{\tau}\right|:t\geq mu,\ \tau\geq nv\right\}$$
$$=\frac{\sin mu}{mu}+\frac{\sin nv}{nv}-\frac{\sin mu}{mu}\cdot\frac{\sin nv}{nv}. \quad (30)$$

Пользуясь соотношением (30), неравенство (29) приобретает следующий вид

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_{2,\mu}\leq\left(\frac{\sin mu}{mu}+\frac{\sin nv}{nv}-\frac{\sin mu}{mu}\cdot\frac{\sin nv}{nv}\right)\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_{2,\mu}$$
$$+(m^2+n^2)^{-r/k}(\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\frac{1}{uv}\int_0^u\int_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^rf;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau. \quad (31)$$

Из (31) следует, что

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_{2,\mu}\cdot\left(1-\frac{\sin mu}{mu}\right)\left(1-\frac{\sin nv}{nv}\right)$$
$$\leq(m^2+n^2)^{-r/k}(\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\frac{1}{uv}\int_0^u\int_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^rf;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau,$$

откуда получаем

$$(m^2+n^2)^r\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}$$
$$\leq\left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k\left\{\int_0^u\int_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^rf;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k. \quad (32)$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, то из (32) следует, что

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^r \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\displaystyle\int_0^u \int_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu} dt d\tau\right\}^k} \leq \left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k. \tag{33}$$

Соответствующую оценку снизу получаем для ранее рассмотренной нами функцию

$$f_0(x,y) = T_m(x)T_n(y) \in L_{2,\mu}^{(r)}$$

для которой, кроме равенств (21), из формулы (9) получаем

$$\Omega_k(\mathcal{D}^r f_0, t, \tau)_{2,\mu} = (m^2+n^2)^r (1-\cos mt)^k (1-\cos n\tau)^k, \tag{34}$$

пользуясь которой для любых $(u,v) \in [0, \pi/(2m)] \times [0, \pi/(2n)]$ запишем

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^r \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\displaystyle\int_0^u \int_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu} dt d\tau\right\}^k} \geq \frac{(m^2+n^2)^r \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\left\{\displaystyle\int_0^u \int_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f_0; t,\tau)_{2,\mu} dt d\tau\right\}^k} = \left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k. \tag{35}$$

Сопоставляя неравенства (33) и (35), имеем

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^r \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\displaystyle\int_0^u \int_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu} dt d\tau\right\}^k} = \left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k. \tag{36}$$

Теперь покажем, что требуемое равенство (26) является следствием (36). При $s = 1, 2, \ldots, r-1$, $r \geq 2$, в левой части (26), полагая $\mathcal{D}^s f = g$, откуда

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 163-183
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 163-183

$\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}^{r-s} g$, с учётом (36) получаем

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{\int_0^u\int_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k}$$
$$= \sup_{g\in L_{2,\mu}^{(r-s)}} \frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(g)_{2,\mu}}{\left\{\int_0^u\int_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^{r-s} g;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k}$$
$$= \left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k$$

и равенство (26) доказано, чем и завершаем доказательство теоремы 2. Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 при* $u=\pi/(2m)$, $v=\pi/(2n)$, $m,n\in\mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{mn\int_0^{\pi/(2m)}\int_0^{\pi/(2n)} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k} = \left(\frac{2}{\pi-2}\right)^k.$$

Справедлива также следующая

Теорема 3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$. *Тогда, при любом* $k\in\mathbb{N}$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{mn\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k} = \frac{1}{4^k}. \tag{37}$$

Доказательство. Умножим обе части (27) на весовую функцию $\sin mt\sin n\tau$ и, интегрируя по области $[0,\pi/m]\times[0,\pi/n]$, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{4}{mn}\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{2,\mu}\\ &\quad-\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\int_0^{\pi/m}\cos pt\sin mtdt+\frac{2}{m}\int_0^{\pi/n}\cos q\tau\sin n\tau d\tau\right.\\ &\quad\left.-\int_0^{\pi/m}\cos pt\sin mtdt\int_0^{\pi/n}\cos q\tau\sin n\tau d\tau\right)\leq(m^2+n^2)^{-r/k}\\ &\quad\times\left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{2-1/k}\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau.\end{aligned} \tag{38}$$

Заметим, что при любых $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq \nu$

$$\int_0^{\pi/\nu} \cos\mu u \sin\nu u du = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu, \\ -\dfrac{2\nu}{\mu^2 - \nu^2}\cos^2\left(\dfrac{\mu\pi}{2\nu}\right), & \text{если } \mu > \nu, \end{cases}$$

поэтому второе слагаемое в левой части (38) является положительным, и если мы его отбрасываем, то только усилим указанное неравенство. Таким образом, для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ имеем

$$\begin{aligned} &\frac{4}{mn} \cdot \mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \\ &\leq (m^2+n^2)^{-r/k}\big(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{2-1/k} \times \\ &\times \int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \\ &\leq \frac{1}{4^k(m^2+n^2)^r}\left\{mn\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau\right\}^k. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует оценка сверху величины, стоящей в левой части (37) при $s = 0$:

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^r \, \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{mn\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau\right\}^k} \leq \frac{1}{4^k}. \tag{39}$$

Чтобы установить обратное неравенство заметим, что для ранее рассмотренной нами функции $f_0 \in L_{2,\mu}^{(r)}$, кроме равенств (21) и (34), также имеет место соотношение

$$\left\{mn\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f_0; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau\right\}^k = 4^k(m^2+n^2)^r,$$

воспользовавшись которым, запишем

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^r\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{mn\displaystyle\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k}$$
$$\geq\frac{(m^2+n^2)^r\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\left\{mn\displaystyle\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f_0;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k}$$
$$=\frac{(m^2+n^2)^r}{4^k(m^2+n^2)^r}=\frac{1}{4^k}. \tag{40}$$

Таким образом, из (39) и (40) следует равенство (37) при $s=0$:

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^r\,\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{mn\displaystyle\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k}=\frac{1}{4^k}. \tag{41}$$

В общем случае при любых $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ равенство (37) с учётом (41) вытекает из следующее равенство

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^{r-s}\,\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{mn\displaystyle\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k}$$
$$=\sup_{g\in L_{2,\mu}^{(r-s)}}\frac{(m^2+n^2)^{r-s}\,\mathcal{E}_{m-1,n-1}(g)_{2,\mu}}{\left\{mn\displaystyle\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^{r-s} g;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k}=\frac{1}{4^k}.$$

Теорема 3 доказана.

Вводим классы функций, для которых решаем экстремальную задачу (15). Через $W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_k)$ обозначим класс функций $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$, при любых $(u,v)\in(0,\pi/(2m)]\times(0,\pi/(2n)]$, $m,n,k\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ удовлетворяющих условию

$$mn\int_0^u\int_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)dtd\tau\leq 1.$$

Аналогичным образом, обозначим через $\widetilde{W}_{m,n}^{(r)}(\Omega_k)_{2,\mu}$ класс функций $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$, при любых $m,n,k\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ удовлетворяющих условию

$$mn\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\leq 1.$$

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть* $m, n, k \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда справедливы равенства*

$$\mathcal{E}^{(s)}_{m-1,n-1}(W^{(r)}_{2,\mu}(\Omega_k)) = \frac{1}{(m^2+n^2)^{r-s}} \left\{ \frac{1}{(mu - \sin mu)(nv - \sin nv)} \right\}^k, \quad (42)$$

$$\mathcal{E}^{(s)}_{m-1,n-1}(\widetilde{W}^{(r)}_{m,n}(\Omega_k)_{2,\mu}) = 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}. \quad (43)$$

Доказательство. Схема доказательства равенств (42) и (43) одинакова, а потому приводим, например, доказательство (43). Из (39) для произвольной функции $f \in L^{(r)}_{2,\mu}$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ имеем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}$$
$$\leq 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)} \left\{ mn \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau \right\}^k,$$

откуда для произвольной функции $f \in \widetilde{W}^{(r)}_{2,\mu}(\Omega_k)$ получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}$$

или, что то же,

$$\mathcal{E}^{(s)}_{m-1,n-1}(\widetilde{W}^{(r)}_{m,n}(\Omega_k)_{2,\mu}) \leq 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}. \quad (44)$$

Простыми вычислениями легко проверить, что для функции $g_0(x,y) = 4^{-k}(m^2+n^2)^{-r}T_m(x)T_n(y)$,

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s g_0)_{2,\mu} = 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}, \quad (45)$$

$$mn \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r g_0; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau = 1, \quad (46)$$

и в силу (46) $g_0 \in \widetilde{W}^{(r)}_{m,n}(\Omega_k)_{2,\mu}$. Поэтому, учитывая равенство (45), запишем

$$\mathcal{E}^{(s)}_{m-1,n-1}(\widetilde{W}^{(r)}_{m,n}(\Omega_k)_{2,\mu}) \geq \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s g_0)_{2,\mu} = 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}. \quad (47)$$

Требуемое равенство (43) получаем из сопоставления оценок сверху (44) и снизу (47), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания, способствующие улучшению изложения результатов статьи.

Список литературы

1. *Шабозов М. Ш., Тухлиев К.* Неравенства Джексона–Стечкина с обобщенными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2015. Т. 21, № 4. С. 292–308.

2. *Гаркави А. Л.* О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1960. Т. 24, № 1. С. 103–128.

3. *Тиман А. Ф.* К вопросу об одновременной аппроксимации функций и их производных на всей числовой оси // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1960. Т. 24, № 3. С. 421–430 .

4. *Малоземов В. Н. Совместное приближение функций и ее производных.* / ЛГУ. 1973.

5. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // *Матем. заметки.* 2012. Т. 92, № 4. С. 497–514. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434612090180

6. *Шабозов М. Ш.* О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2023. Т. 29, № 4. С. 283–291. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-4-283-291

7. *Шабозов М. Ш.* О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2 // *Матем. заметки.* 2023. Т. 114, № 3. С. 435–446. https://doi.org/10.4213/mzm13422

8. *Абилов В. А., Керимов М. К.* Об оценках остаточных членов кратных рядов Фурье-Чебышева и кубатурных формул Чебышевского типа // *ЖВМ и МФ.* 2003. Т. 43, № 5. С. 643–663.

9. *Ржавинская Е. В. О приближении алгебраическими многочленами в метрике L_2 с весом* / Дис. канд. физ.-матем. наук, Москва, 1980.

10. *Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены.* / Москва. Наука. 1979.

11. *Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О.* Среднеквадратическое приближение “углом” в метрике L_2 и значения квазипоперечников некоторых классов функций // *Укр. мат. журн.* 2020. Т. 72, № 6. С. 852–864. DOI:10.37863/umzh.v72i6.1064

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 163-183
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 163-183

12. *Потапов М. К.* О приближении “углом” // Proc of the Conf. on Constructive Theory of Functions. Budapest. 1972, С. 371–399.

13. *Томич М.* О приближении “углом” функций с доминирующим модулем гладкости // *Publ.Delinst.Math. (Beograd).* 1978. Т. 23, № 37. С. 193–206.

14. *Haussmann W., Zeller K.* Uniqueness and non-uniqueness in bivariate L^1-approximation. Approximation Theory IV // *Proc. of Intern. Symp.*, College Station, Tex., January 10–14 (Academic Press, New York), 1983. P. 509–514.

15. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // *Тр. МИАН СССР.* 1986. Т. 178. С. 3–113.

16. *Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О.* О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2 // *Чебышевский сб.* 2019. Т. 20, № 2. С. 348–365. DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-2-348-365.

17. *Куликова Т. Ю.* Приближение функций в метрике L_2 с весом Якоби // *Изв. вузов. Матем.* 1999, № 4. С. 73–76.

18. *Алексеев Д. В.* Приближение функций нескольких переменных с весом Чебышева–Эрмита // *Изв. вузов. Матем.* 2000. № 6. С. 3–9.

19. *Мадимарова Ф. М.* О наилучшем приближении в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных // *Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н.* 2017, № 3(168). С. 16–25.

References

1. *Shabozov M. Sh., Tukhliev K.* Jackson–Stechkin type inequalities with generalized moduli of continuity and widths of some classes of functions // *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.* 2015. V. 21, N 4, P. 292–308. (In Russian)

2. *Garkavi A. L.* On the joint approximation of a periodic function and its derivatives by trigonometric polynomials // *Izv. Acad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* 1960. V. 24, N 1. P. 103–128. (In Russian)

3. *Timan A. F.* On the problem of simultaneous approximation of functions and their derivatives on the entire real axis // *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* 1960. V. 24, N 3. P. 421–430. (In Russian)

4. *Malozemov V. N. Joint approximation of functions and their derivatives.* / Leningrad State University. 1973. (In Russian)

5. *Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I.* Jackson–Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2 // *Math. Notes.* 2012. V. 92, N 4. P. 497–514. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434612090180

6. *Shabozov M. Sh.* On the best simultaneous approximation of functions in the Hardy space // *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.* 2023. V. 29, N 4. P. 283–291. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-4-283-291

7. *Shabozov M. Sh.* On the Best Simultaneous Approximation in the Bergman Space B_2 // *Math. notes.* 2023. V. 114, N 3. P. 435–446. https://doi.org/10.1134/S0001434623090080.

8. *Abilov V. A., Kerimov M. K.* On the Estimates of Remainder Terms of Multiple Fourier-Chebyshev Series and Cubature Formulas of Chebyshev Type // *Comput. Math. Math. Phys.* 2003. V. 43, N 5. P. 643–663.

9. *Rjavinskaya E. V. On approximation by algebraic polynomials in the L_2 metric with a weight* / Dissertacia kandidat. fiz.-mat. nauk, Moskva, 1980.

10. *Suetin P. K. Klassicheskie ortogonalnie mnogochleni* [Classical Orthogonal Polynomials] / Moskva. Nauka. 1979. (In Russian)

11. *Shabozov M. Sh., Akobirshoev M. O.* Mean-square approximation by an angle in L_2 and the values of quasiwidths for some classes of functions // *Ukr. Mat. Zhurn.* 2020. V. 72, N 6. P. 852–864. DOI:10.37863/umzh.v72i6.1064

12. *Potapov M. K. On approximation by "angle"* // Proc of the Conf. on Constructive Theory of Functions, Budapest, 1972. P. 371–399.

13. *Tomich M.* On the "angle" approximation of functions with a dominating modulus of smoothness // *Publ. Delinst. Math. (Beograd).* 1978. V. 23, N 37. P. 193–206. (In Russian)

14. *Haussmann W., Zeller K.* Uniqueness and non-uniqueness in bivariate L^1-approximation. Approximation Theory IV // *Proc. of Intern. Symp.*, College Station, Tex., January 10–14 (Academic Press, New York). 1983. P. 509–514.

15. *Temlyakov V. N.* Approximation of functions with a bounded mixed derivative // *Trudy MIAN SSSR.* 1986. V. 178. P. 3–113. (In Russian)

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 163-183
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 163-183

16. *Shabozov M. Sh., Akobirshoev M. O.* About Kolmogorov type of inequalities for periodic functions of two variables in L_2 // *Chebyshevskii Sbornik.* 2019. V. 20., N 2. P. 348–365. DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-2-348-365.

17. *Kulikova T. Yu.* Approximation of functions in the metric L_2 with Jacobi weight // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 1999, N 4. P. 73–76. (In Russian)

18. *Alekseev D. V.* Approximation of functions of several variables with a Chebyshev–Hermite weight // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 2000. N 6. P. 3–9. (In Russian)

19. *Madimarova F. M.* On the best approximation in the mean with the Chebyshev weight for some classes of differentiable functions of two variables // *Izv. Acad. Nauk RT. Phys.-Math., Chem., Geol. and Techn. Sci.* 2017, N 3(168). P. 16–25. (In Russian)

Информация об авторах

Мирганд Шабозович Шабозов, доктор физико-математических наук, профессор, Академик НАН Таджикистана

SPIN 9315-7401 AuthorID: 743643

Scopus Author ID 55977604300

Фавзия Мадимаровна Мадимарова, координатор по математике Университета Центральной Азии

SPIN 8983-8556 AuthorID: 1036200

Author Information

Mirgand Sh. Shabozov, Doctor of Mathematics, Professor, Academician of the Academy of Sciences of Tajikistan

SPIN 9315-7401 AuthorID: 743643

Scopus Author ID 55977604300

Favziya M. Madimarova, Mathematics Coordinator at the University of Central Asia

SPIN 8983-8556 AuthorID: 1036200

Статья поступила в редакцию 04.07.2025; одобрена после рецензирования 09.10.2025; принята к публикации 21.01.2026

The article was submitted 04.07.2025; approved after reviewing 09.10.2025; accepted for publication 21.01.2026